Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da $y(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$.

1. Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico G_f della funzione;
2. dimostra che la funzione $g(x) = (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$ è simmetrica a f rispetto all'asse y e tracciarne il grafico G_g;
3. detti P e Q i punti di intersezione rispettivamente del grafico G_f e del grafico G_g con l'asse x, determina l'area A della porzione di piano delimitata dal segmento PQ e dai grafici G_f e G_g;
4. sia f_a la famiglia di funzioni definite da $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Per ogni funzione f_a la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l'asse x e l'asse y delimitando un triangolo rettangolo. Determina i valori di a per i quali tale triangolo è anche isoscele, spiegando il procedimento seguito.

---

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = (4x-2)e^{2x}$ è continua e infinitamente derivabile su $\mathbb{R}$.
Studiamo la sua derivata prima per determinare i suoi eventuali punti di minimo e di massimo.

$$f'(x) = 4e^{2x} + (4x-2)\cdot 2e^{2x} = 8xe^{2x}.$$

Otteniamo allora:

- $f'(x) = 0$ per $x = 0$, con $f(0) = (4\cdot 0 - 2)e^{2\cdot 0} = -2$;
- $f'(x) > 0$ e $f(x)$ crescente per $x > 0$;
- $f'(x) < 0$ e $f(x)$ decrescente per $x < 0$.

La funzione ha dunque un solo punto di minimo relativo e assoluto di coordinate $(0; -2)$.

Procediamo in modo analogo con la derivata seconda.

$$f''(x) = 8e^{2x} + 8x\cdot 2e^{2x} = (8+16x)e^{2x}.$$

Risulta:

- $f''(x) = 0$ per $x = -\frac{1}{2}$, con $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\right]e^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = -4e^{-1} = -\frac{4}{e} \simeq -1{,}47$;
- $f''(x) > 0$ e $f(x)$ volge la concavità verso l'alto per $x > -\frac{1}{2}$;
- $f''(x) < 0$ e $f(x)$ volge la concavità verso il basso per $x < -\frac{1}{2}$.

La funzione ha dunque un solo punto di flesso di coordinate $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{e}\right)$.

Per disegnare il grafico G_f, determiniamo infine le intersezioni con gli assi, i limiti agli estremi del dominio e il segno della funzione:

$f(0) = -2$ come già detto;

$$f(x) = 0 \rightarrow (4x-2)e^{2x} = 0 \rightarrow 4x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(4x-2)e^{2x} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(4x-2)e^{2x} = +\infty;$$

$$f(x) > 0 \rightarrow (4x-2)e^{2x} > 0 \rightarrow 4x - 2 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Disegniamo un grafico plausibile della funzione.

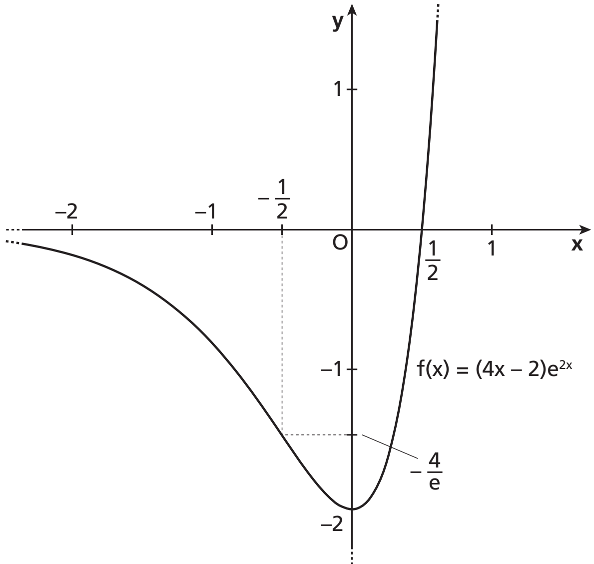

Figura 3

2. Poiché $g(x)=f(-x)$, la funzione $g(x)$ è simmetrica a $f(x)$ rispetto all'asse y; tracciamo il suo grafico G_g a partire dal grafico di $f(x)$.

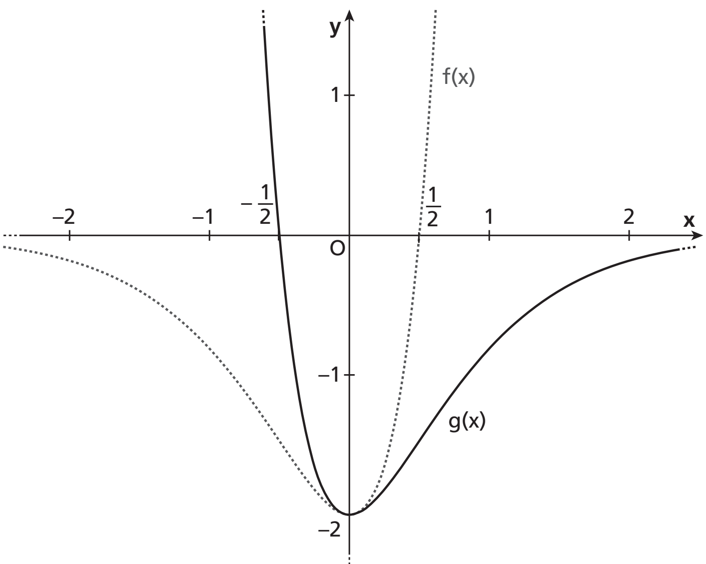

Figura 4

3. I punti P e Q hanno coordinate $P\left(\frac{1}{2};0\right)$ e $Q\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Per la simmetria dei grafici G_f e G_g abbiamo:

$$A=-\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0}g(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx\right)=-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}[(4x-2)e^{2x}]dx;$$

abbiamo anteposto il segno meno all'integrale per avere un valore positivo per l'area, visto che le funzioni sono negative nell'intervallo considerato.

Calcoliamo l'integrale indefinito corrispondente:

$$\int[(4x-2)e^{2x}]dx = \int(4xe^{2x}-2e^{2x})dx =$$

$$\int 2x \cdot 2e^{2x}dx - \int 2e^{2x}dx = \int 2x \cdot \mathrm{D}[e^{2x}]dx - \int \mathrm{D}[e^{2x}]dx =$$

$$2xe^{2x} - \int 2e^{2x}dx - e^{2x} =$$

$$2xe^{2x} - e^{2x} - e^{2x} + c = (2x-2)e^{2x} + c,$$

dove siamo ricorsi all'integrazione per parti per risolvere $\int 4xe^{2x}dx$.

Tornando al calcolo dell'area, otteniamo:

$$A = -2\int_0^{\frac{1}{2}}[(4x-2)e^{2x}]dx = -2[(2x-2)e^{2x}]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$-2\left\{\left[\left(2\cdot\frac{1}{2}-2\right)e^{2\frac{1}{2}}\right] - [(2\cdot 0-2)e^{2\cdot 0}]\right\} =$$

$$-2(-e+2) \simeq 1,44.$$

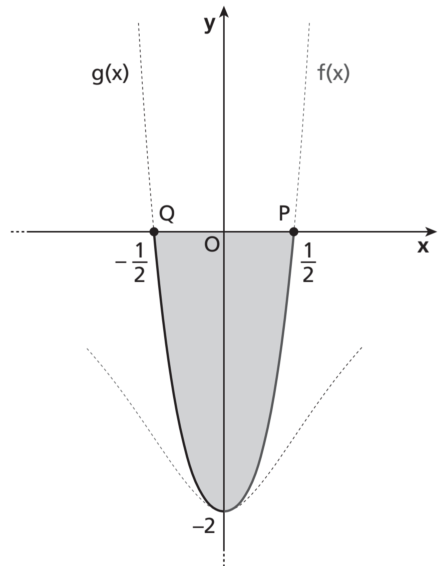

Figura 5

4. Consideriamo la funzione $f_a(x) = (2ax-2)e^{ax}$ della famiglia assegnata, con $a \neq 0$.
Osserviamo che la funzione $f(x)$ considerata in precedenza è la funzione della famiglia che si ottiene per $a = 2$, mentre $g(x)$ si ottiene per $a = -2$.
Più in generale, l'andamento della funzione $f_a(x)$ è simile a quello della funzione $f(x)$ per $a > 0$ e a quello della funzione $g(x)$ per $a < 0$. In particolare, per $a > 0$ $f_a(x)$ è ottenuta da $f(x)$ mediante una dilatazione o una contrazione orizzontale, per $a < 0$ $f_a(x)$ è ottenuta da $g(x)$ mediante una dilatazione o contrazione orizzontale:

$$f_a(x) = f(h(x)), \text{ con } h(x) = ax \text{ e } a \neq 0.$$

Determiniamo il punto di flesso di $f_a(x)$:

$$f_a'(x) = 2ae^{ax} + (2ax-2)\cdot ae^{ax} = 2a^2xe^{ax},$$

$$f_a''(x) = 2a^2e^{ax} + 2a^3xe^{ax} = 2a^2(1+ax)e^{ax}.$$

Poiché $a \neq 0$ per ipotesi, risulta:

$$f_a''(x) = 0 \;\rightarrow\; 1+ax = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{a};$$

inoltre $f_a''(x)$ cambia di segno prima e dopo $x = -\frac{1}{a}$, che risulta dunque l'ascissa dell'unico punto di flesso. Calcoliamo la corrispondente ordinata:

$$f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = \left[2a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)-2\right]e^{a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)} = -4e^{-1} = -\frac{4}{e},$$

e osserviamo che il suo valore non dipende da a.

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f_a(x)$ nel punto di flesso $F\left(-\frac{1}{a}; -\frac{4}{e}\right)$ vale:

$$f_a'\left(-\frac{1}{a}\right) = 2a^2\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)e^{a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)} = -2ae^{-1} = -\frac{2a}{e}$$

e la retta tangente ha equazione:

$$y - f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = f_a'\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\left[x - \left(-\frac{1}{a}\right)\right] \rightarrow y + \frac{4}{e} = -2\frac{a}{e}\cdot\left(x + \frac{1}{a}\right) \rightarrow$$

$$y = -2\frac{a}{e}x - \frac{2}{e} - \frac{4}{e} \rightarrow y = -2\frac{a}{e}x - \frac{6}{e}.$$

Determiniamo le intersezioni della retta tangente con gli assi cartesiani.

Intersezione con l'asse *x*:

$$\begin{cases} y = -2\frac{a}{e}x - \frac{6}{e} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow -2\frac{a}{e}x - \frac{6}{e} = 0 \rightarrow -2ax - 6 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{a} \rightarrow A\left(-\frac{3}{a}; 0\right).$$

Intersezione con l'asse *y*:

$$\begin{cases} y = -2\frac{a}{e}x - \frac{6}{e} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2\frac{a}{e}\cdot 0 - \frac{6}{e} \rightarrow y = -\frac{6}{e} \rightarrow B\left(0; -\frac{6}{e}\right).$$

Rappresentiamo la situazione relativa al caso $a > 0$ nel disegno qui sotto, ricordando che la situazione relativa al caso $a < 0$ si ottiene per simmetria rispetto all'asse *y*.

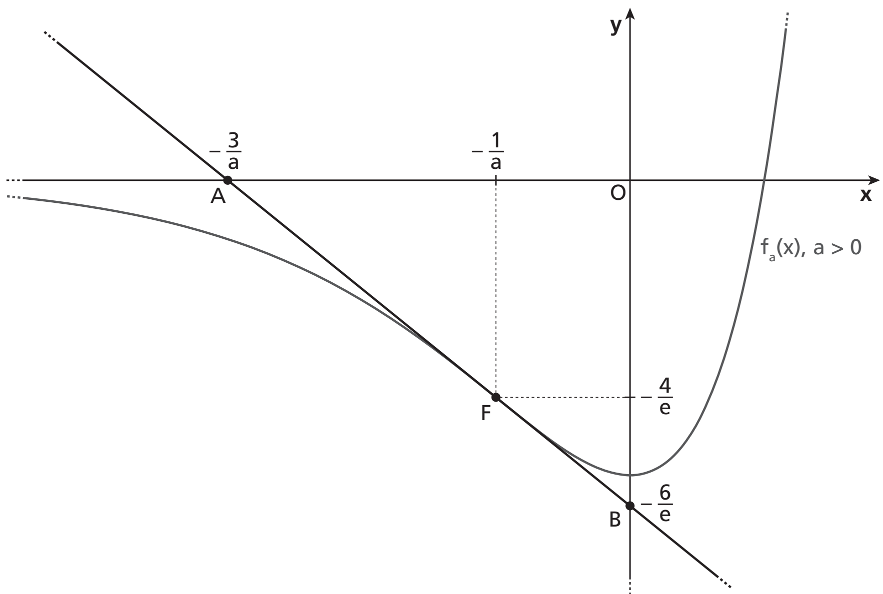

Figura 6

Il triangolo *OAB* è isoscele se i cateti *OA* e *OB* hanno la stessa lunghezza; imponendo questa condizione troviamo il valore di *a* cercato:

$$|x_A| = |y_B| \rightarrow \left|-\frac{3}{a}\right| = \left|-\frac{6}{e}\right| \rightarrow \frac{3}{a} = \pm\frac{6}{e} \rightarrow a = \pm\frac{e}{2}.$$

I valori di *a* per i quali *OAB* è isoscele sono due.

Per $a = \frac{e}{2}$, la tangente al grafico di $f_{\frac{e}{2}}$ nel punto di flesso è parallela alla bisettrice $y = -x$, come in figura.

Per $a = -\frac{e}{2}$, la tangente al grafico di $f_{-\frac{e}{2}}$ nel punto di flesso è parallela alla bisettrice $y = x$.